

3 Análisis de flexibilidad: el método de liberación - deformación

El método de liberación-deformación utilizado para el análisis de estructuras es esencialmente una variante del método de flexibilidades, en el cual los nodos de un marco se liberan inicialmente, examinándose las discontinuidades y desplazamientos relativos y — tras expresarlos matricialmente— llegar a la solución. Sin embargo, en el método de liberación-deformación, la solución se obtiene aplicando fuerzas o momentos para restaurar la estructura a su estado original, tomando en cuenta la flexibilidad relativa de los miembros; por lo tanto, puede describirse como un método de desplazamientos que emplea una matriz de rigidez modificada.

Sus principales atributos recaen en el uso de los diagramas de deformación, con el fin de describir el comportamiento de la estructura sometida a carga y determinar el tratamiento correcto que se le dará al signo. Se prefiere esta modalidad contra el enfoque matemático más riguroso adoptado por el método matricial de flexibilidades, aunque los conceptos básicos sean no obstante los mismos.

Para investigar el comportamiento de la estructura se introducen en ciertos puntos una serie de liberaciones o 'articulaciones', por lo general en las uniones o apoyos. El aspecto deformado de la estructura es entonces examinado, tomándose nota de las discontinuidades, teniendo en cuenta las propiedades físicas de los miembros. El procedimiento puede explicarse a través de las siguientes etapas.

- (1) Se introducen liberaciones de la estructura en ciertos puntos específicos. Aunque teóricamente estos pueden localizarse en cualquier parte, usualmente conviene que sean las uniones o soportes. Si las uniones son capaces de experimentar desplazamientos, se requerirán restricciones temporales.
- (2) La introducción de estas liberaciones ocasionará que se presenten rotaciones en vigas y desplazamientos lineales en armaduras, por poner dos casos. Se bosqueja la estructura en su estado deformado a fin de identificar estas discontinuidades en términos de rotaciones angulares, desplazamientos lineales o desplazamientos nodales.
- (3) Las fuerzas o momentos son ahora aplicados simultáneamente a la estructura liberada, con una magnitud y orientación tal que se eliminen las discontinuidades y restauren la estructura a su estado de liberación. Al proceder de esa manera deberán satisfacerse las condiciones de compatibilidad de deformaciones y equilibrio de fuerzas. Estas condiciones, al expresarse en forma de ecuaciones, nos permiten determinar las fuerzas desconocidas, momentos y desplazamientos.
- (4) El conjunto de ecuaciones simultáneas puede ponerse en formato compacto y tabular, utilizando parámetros de flexibilidad y notación matricial. Las ecuaciones de pendiente/deflexión permiten expresar los cambios angulares en términos de carga, claro y flexibilidad relativa. Los números tabulados proveerán los datos que alimentarán un apropiado programa de cómputo.

Debe aclararse que en el caso de armaduras, las liberaciones se aplicarán a los miembros únicamente en uno de sus extremos y en una secuencia previamente seleccionada. Estas liberaciones ocasionarán que las fuerzas directas de los miembros sean reducidas a cero, en tanto que la resultante de alargamiento o acortamiento correspondiente producirá discontinuidades en las juntas que pueden ser evaluadas.

Características especiales

Debido a que será utilizado de manera exclusiva en este trabajo, se resumen a continuación las características esenciales del método de liberación-deformación.

- (1) Se usa un diagrama de deformación para identificar las discontinuidades producidas por la liberación y los momentos y fuerzas necesarios para restaurar la estructura a su condición original. Esto no representa el aspecto deformado real de la estructura sino el aspecto asumido después de la introducción de liberaciones y cualesquier restricciones temporales requeridas para su estabilidad. Las ecuaciones son derivadas del estudio de este diagrama en lugar de hacerlo a partir de conceptos teóricos. El uso exitoso depende por tanto de la comprensión de cómo la estructura ejecuta su función, más que de proezas matemáticas.
- (2) Se aprovecha el diagrama de deformación en conjunto con una convención simple para la determinación de signos. Si la deformación asumida en el dibujo y los datos de entrada son correctos, la respuesta tendrá un signo positivo. Un signo negativo indicará que la deformación no es, de hecho como se supuso o bien ocurrió un error en la introducción de datos. Los resultados negativos obtenidos necesitarán algo de investigación aunque pueden existir razones perfectamente válidas para que ocurran, por ejemplo, un diagrama de deformación aplicable a carga vertical deferirá del supuesto para los asentamientos de los apoyos de una viga continua, siendo así factibles resultados negativos cuando ambas situaciones sean analizadas en conjunto de manera recíproca.
- (3) Se utiliza un 'elemento de referencia' en la descripción de la estructura para proveer los diferentes valores y orientaciones de E e I . Los 'elementos de referencia' típicos son el primer tramo de una viga continua, la viga de un marco o el primer elemento finito de una estructura continua. Este procedimiento simplifica considerablemente la preparación de datos, debido a que sólo se requieren los valores relativos de E e I ; además, en vez de usar un sistema de coordenadas inoperante y con tendencia al error, los miembros de las armaduras y de los sistemas de vigas reticuladas pueden describirse enteramente por medio del ángulo que subtienden relativo al elemento de referencia seleccionado.
- (4) El uso de parámetros de flexibilidad para simplificar el cálculo de los diferentes términos que componen a la matriz de coeficientes.
- (5) Los vectores relacionados con oscilaciones, desplazamiento nodales o asentamientos son fácilmente calculados, consistiendo con frecuencia simplemente de las inversas de las alturas de las columnas o claros de las trabes.
- (6) El uso de programas de computadora escritos en BASIC elemental para la obtención de los momentos requeridos, cortantes, normales, etc. empleando el análisis de liberación - deformación.

- (7) Los programas pueden ser comprendidos por cualquiera que posea conocimientos elementales de programación BASIC, son además programas lo bastante cortos para ser tecleados sin ninguna dificultad. Debido a que no utilizan rutinas codificadas en lenguaje máquina, los programas podrán ejecutarse con cualquier computadora con BASIC instalado.
- (8) Se procuró conservar en un mínimo de tiempo la preparación de los datos de entrada. Los programas contienen muy pocas declaraciones INPUT (entrada), de manera que la mayor parte del tiempo se ejecutarán sin interrupciones. Se considera que esto es más importante que el uso de los mensajes comúnmente conocidos como 'amistosamente computacionales'. Se han tomado providencias para registrar todos los datos y etapas vitales del análisis además de las respuestas en las impresiones de salida, con propósito de verificación.
- (9) Las matrices de coeficientes y los vectores se han expresado en términos generales para cada sistema estructural básico. Estos términos pueden ser utilizados directamente para alimentar los datos de un problema particular, de manera que el análisis en muchos casos sea un procedimiento rutinario.

Convención de signos

La convención adoptada en el análisis está basada en las siguientes reglas generales:

- (1) En las ecuaciones de equilibrio las fuerzas que se oponen a las cargas aplicadas o a las restricciones de una junta se consideran positivas; al resolver las fuerzas, aquellas que actúen hacia la derecha cuando se proyecten sobre el eje XX y hacia arriba del eje YY se considerarán positivas.
- (2) En las ecuaciones de compatibilidad lineal, las fuerzas que cierran la discontinuidad lineal en el punto bajo estudio son consideradas positivas.
- (3) En las ecuaciones de compatibilidad angular, los momentos que cierran la discontinuidad angular en el punto de aplicación son considerados positivos.

En conclusión, en vigas que soportan cargas que actúan hacia abajo, los momentos de liberación se aplicarán en los apoyos, en la dirección mostrada en la figura 3.1, con el fin de contrarrestar los cambios angulares que ahí ocurren. Se considera que estos momentos son positivos, produciendo en este caso tensión en la zona superior de la viga. Los momentos de liberación que son aplicados para contrarrestar los cambios angulares debidos al asentamiento o desplazamientos nodales son considerados positivos si actúan en la misma dirección que los momentos de las 'cargas', de lo contrario los términos vectoriales serán registrados con signo negativo.

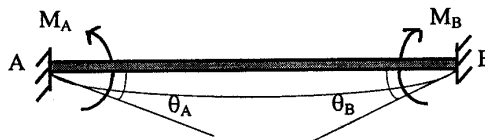


Figura (3.1)

En cimentaciones, donde las reacciones del suelo actúan hacia arriba, los momentos de liberación se aplicarán en la dirección opuesta a los citados en el párrafo anterior. En este caso, los momentos positivos producen tensión en la zona *inferior*, que es la situación normal en cimentaciones.

los cantilivers son tratados con momentos de liberación aplicados en el soporte (suponiendo que un puntal temporal será colocado en el extremo) en la *misma dirección* que el momento del cantiliver, haciendo que sea negativo el término vectorial. Esto garantizará que el signo sea correcto cuando se combinen los momentos del tramo del cantiliver.

Los diagramas de MF se construyen con los valores positivos por arriba de la línea base de referencia. Esto significa que en todos los casos, excepto en cimentaciones, los diagramas aparecerán sobre el lado de *tensión* del miembro.

Procedimiento

Antes de examinar en detalle la forma en que puede emprenderse la solución de problemas relacionados con cimentaciones y emparrillados, puede resultar útil discutir los procedimientos generales empleados en resolver varias formas estructurales, comenzando con una de las más simples, la viga de un solo tramo.

3.1 VIGAS DE UN SOLO TRAMO

Las ecuaciones para vigas de un solo tramo sujetas a carga vertical fueron derivadas en el capítulo 1, tema 1.2 Desplazamientos Angulares. De esta manera, para una viga empotrada en sus extremos con una carga uniformemente distribuida, se utilizan las ecuaciones (1.8) y (1.9), el valor apropiado de γ lo obtenemos de la tabla 1.1, por lo tanto

$$\text{A.A: } 2M_A + M_B = \frac{1}{4}WL$$

$$\text{A.B: } M_A + 2M_B = \frac{1}{4}WL$$

$$\text{De aqui, } M_A = M_B = \frac{WL}{12}$$

similarmente para una carga triangular simétrica obtenemos

$$M_A = M_B = \frac{WL}{9.6}$$

Los momentos flexionantes en los apoyos para otro tipo de carga pueden ser obtenidos de la misma manera. Obviamente los cálculos manuales son adecuados para resolver tales problemas.

3.2 VIGAS CONTINUAS

El procedimiento para vigas continuas puede ilustrarse tomando como referencia la figura (3.2), la cual representa una viga continua de 4 claros soportando cargas vivas distribuidas. Se inducen liberaciones en los apoyos A,B,C,D,E, ocasionando que la viga se cuelgue y asuma la forma mostrada por la curva de trazo continuo.

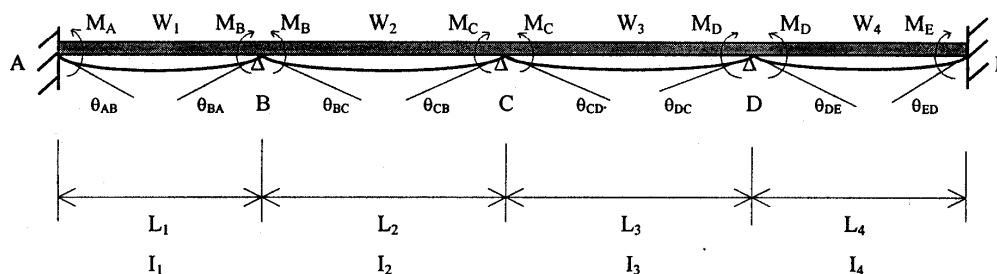


Figura (3.2)

Las líneas tangenciales al perfil deformado dan los cambios de pendiente θ en los apoyos. Así, θ_{AB} es el cambio de pendiente de AB, θ_{BA} es el cambio de pendiente de BA, y así sucesivamente.

Para eliminar estos cambios angulares se aplican momentos en los extremos de los claros. Estos, mostrados y denotados como M_A , M_B , M_C , etc., son aplicados en una dirección que cerrará las discontinuidades y restaurará la viga a su alineamiento original. (debido a que $M_{BA}=M_{BC}$).

Se toma el primer tramo como elemento de referencia de las propiedades básicas, E , I y L . Debido a que E es constante para todos los tramos, podemos describir el comportamiento de la viga en flexión por medio de la relación de flexibilidad $k=L/I$. Seleccionando el primer tramo con el sufijo r que es el miembro de referencia, la relación de flexibilidad relativa de cualquier tramo n puede escribirse como:

$$K_n = \frac{k_n}{k_r} = \frac{\frac{L_n}{I_n}}{\frac{L_r}{I_r}} = \frac{L_n I_r}{I_n L_r} \quad (3.1)$$

Así, para el tramo 1, $k_1=L_1/I_1$ y $K_1=1$

$$\text{Tramo 2,} \quad k_2 = \frac{L_2}{I_2} \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{L_2 I_1}{I_2 L_1}; \quad \text{si } I_2=I_1 \Rightarrow K_2 = \frac{L_2}{L_1}$$

$$\text{Tramo 3,} \quad k_3 = \frac{L_3}{I_3} \quad \text{y} \quad K_3 = \frac{L_3 I_1}{I_3 L_1}; \quad \text{si } I_3=I_1 \Rightarrow K_3 = \frac{L_3}{L_1}, \text{ et c.}$$

Ecuaciones de compatibilidad similares a las ecuaciones (1.8) y (1.9), pueden escribirse para las condiciones de cada uno de los apoyos, como sigue:

$$A.A: M_A \frac{L_1}{3EI_1} + M_B \frac{L_1}{6EI_1} = \theta_{AB}$$

Multiplicando todo por $\frac{6EI_1}{L_1} = P$, obtenemos

$$2M_A + M_B = \frac{6EI_1}{L_1} \theta_{AB} = P\theta_{AB}$$

Pero $P\theta_{AB} = \gamma W_1 L_1$ (véanse las ecuaciones 2.7a y 2.9a); por lo que, para una carga uniformemente distribuida con un valor de $\gamma = 1/4$ tomado de la tabla 1.1, obtenemos

$$A.A : 2M_A + M_B = \frac{1}{4} W_1 L_1$$

Para el cambio angular en el apoyo B, denotado por A.B obtenemos

$$A.B : M_A \frac{L_1}{6EI_1} + M_B \left(\frac{L_1}{3EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} \right) + M_C \frac{L_2}{6EI_2} = \theta_{BA} + \theta_{BC}$$

Multiplicamos todo por $\frac{6EI_1}{L_1} = P$

$$M_A + 2(1 + K_2)M_B + K_2M_C = \gamma W_1 L_1 + \gamma K_2 W_2 L_2$$

$$M_A + 2(1 + K_2)M_B + K_2M_C = \frac{1}{4} W_1 L_1 + \frac{1}{4} K_2 W_2 L_2$$

Similarmente :

$$A.C : K_2 M_B + 2(K_2 + K_3)M_C + K_3 M_D = \frac{1}{4} (K_2 W_2 L_2 + K_3 W_3 L_3)$$

$$A.D : K_3 M_C + 2(K_3 + K_4)M_D + K_4 M_E = \frac{1}{4} (K_3 W_3 L_3 + K_4 W_4 L_4)$$

$$A.E : K_4 M_D + 2K_4 M_E = \frac{1}{4} K_4 W_4 L_4$$

Estas ecuaciones son expresadas en forma de matriz tabular en la tabla (3.1). Para resolver un problema particular, los términos de la tabla (3.1) son evaluados y alimentados como datos en la secuencia correcta, una vez que el programa seleccionado está en memoria. Esencialmente se utiliza el mismo procedimiento para resolver cualquier número de tramos bajo cualquier sistema de cargas, empleando el factor γ apropiado de la tabla (1.1).

Tabla (3.1)

ECUACIÓN	A	B	C	D	E	$\bar{W}$
A.A	2	1	0	0	0	$\frac{1}{4}(W_1 L_1)$
A.B	1	$2(1+K_2)$	K_2	0	0	$\frac{1}{4}(W_1 L_1 + K_2 W_2 L_2)$
A.C	0	K_2	$2(K_2 + K_3)$	K_3	0	$\frac{1}{4}(K_2 W_2 L_2 + K_3 W_3 L_3)$
A.D	0	0	K_3	$2(K_3 + K_4)$	K_4	$\frac{1}{4}(K_3 W_3 L_3 + K_4 W_4 L_4)$
A.E	0	0	0	K_4	$2K_4$	$\frac{1}{4}K_4 W_4 L_4$

A partir de lo anterior se concluye que los términos del vector $\bar{W}$ comprenden la suma de los valores γWKL para los claros a uno y otro lado del apoyo considerado, donde:

γ = Factor extraíble de la tabla (1.1)

K = Factor de flexibilidad relativa $K = k_n/k_r$

W = Carga total sobre el tramo (o el valor de la carga concentrada)

L = Longitud del claro

Si los extremos A y E estuvieran articulados, entonces $M_A = M_E = 0$, o sea, el cambio angular en la liberación es cero. Pueden por tanto ser eliminadas las ecuaciones A.A y A.E, debido a que ahí las liberaciones no son necesarias. Se concluye que los primeros y últimos renglones y columnas son omitidas de la tabla (3.1) cuando se trabaja con vigas continuas cuyos extremos están simplemente apoyados.

En el caso de que ocurran asentamientos de los apoyos en vigas continuas o doblemente empotradas, se tabula un vector adicional obtenido al considerar los cambios angulares debidos al asentamiento, cuando se efectúa la liberación. El análisis de vigas excéntricas interconectadas por medio de cantilivers y vigas sometidas a torsión deben ser tratadas de manera especial.

Para ver cómo se aplica en la práctica el procedimiento que acabamos de exponer para una viga continua, considere la figura (3.3) en la que una viga de 4 claros soporta una variedad de sistemas de cargas. Los momentos de inercia relativos para cada tramo se indican en la figura. La relación de flexibilidad relativa de cada tramo es:

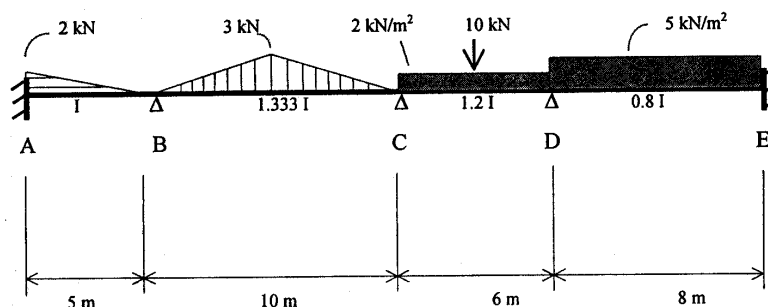


Figura (3.3)a

$$K_1 = 1 \text{ Para vigas continuas, por ser la referencia } K_1 = \frac{k_n}{k_r} = 1 \Leftrightarrow k_n = k_r$$

$$K_2 = \frac{L_2 I_1}{I_2 L_1} = \frac{10}{1.33315} \frac{I}{I} = 1.5$$

$$K_3 = \frac{L_3 I_1}{I_3 L_1} = \frac{6}{1.215} \frac{I}{I} = 1$$

$$K_4 = \frac{L_4 I_1}{I_4 L_1} = \frac{8}{0.815} \frac{I}{I} = 2$$

Las cantidades vectoriales que serán introducidas en la tabla de datos pueden obtenerse por medio de un cálculo paso a paso (compárese con la tabla 3.1).

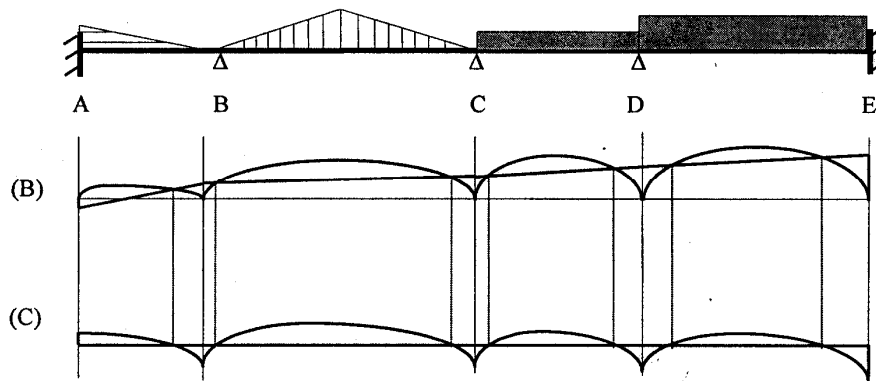
APOYO	CLARO	γWKL	W
A	AB	6.667	6.667 (A)
B	BA	5.833	
B	BC	70.313	76.146 (B)
C	CB	70.313	
C	CD	40.5	110.813 (C)
D	DC	40.5	
D	DE	160.0	200.5 (D)
E	ED	160.0	160.0 (E)

Los resultados de estos cálculos se incorporan a la tabla (3.2) . La introducción de estas cantidades en forma de declaraciones DATA al programa MATIN, produce los resultados mostrados en el renglón del fondo de la tabla.

Tabla (3.2) Tabla de datos

APOYO	MOMENTO				
	A	B	C	D	E
A	2	1	0	0	0
B	1	5	1.5	0	0
C	0	1.5	5	1	0
D	0	0	1	6	2
E	0	0	0	2	4
W	6.667	76.146	110.813	200.5	160.0
RESULTADOS MATIN N=5	-2.34	11.34	14.52	21.20	29.40

En la figura (3.3)b, el diagrama de momentos de los apoyos (hiperestático o redundante), consistente en una serie de líneas continuas que conectan a los diferentes valores que toma el momento en cada apoyo, es superpuesto a los diagramas de momentos 'libres' (isostáticos). Esto produce una nueva línea-base de referencia con valores de momentos positivos dibujados por arriba de ella y valores negativos por debajo, lo que le da una apariencia quebrada.



El diagrama de MF final mostrado en la figura (c) se obtuvo combinando los valores anteriores con respecto a una línea base continua. Este procedimiento es muy útil, pudiéndose prescindir de los diagramas de momentos de los apoyos y del isostático (libre), ya que ambos se incorporan en el diagrama final. Los diagramas de fuerzas cortantes pueden dibujarse utilizando simplemente los valores obtenidos mediante consideraciones estáticas ordinarias.

Los momentos de carga en los apoyos pueden obtenerse utilizando patrones de carga diferentes (por ejemplo, tramos cargados alternativamente), modificando simplemente los términos $\bar{W}$ antes de ejecutar el programa.

3.3 ESTRUCTURAS CONTINUAS Y ELEMENTOS FINITOS

Las ecuaciones previas asumen que las vigas son de sección uniforme (prismática) a través de todo el claro y que las cargas se aplican conforme a un patrón definido. En aquellos casos en los que la viga o carga sean irregulares, el problema puede atacarse dividiendo el miembro en varias secciones pequeñas (elementos finitos) y considerando cada uno por separado. Las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse para cada nodo en frecuencia, resolviéndose seguidamente los datos tabulares por medio de un programa de cómputo en la forma usual que hemos estudiado.

Considere el caso general de una viga de peralte variable que soporta una carga distribuida de manera irregular de intensidad w , como se muestra en la figura (3.4). Se supone que la viga simplemente apoyada es dividida en varias franjas cortas de longitud a , con momentos de inercia I_1, I_2, I_3 , etc. en la figura se indican

con 0, 1, 2, 3, etc. la numeración de los nodos en tanto que las cargas aplicadas sobre ellos se designan como W_0, W_1, W_2 , etc. se supone también que no ocurre flexión entre los nodos, de manera que los cambios angulares durante la liberación se deben enteramente a los desplazamientos nodales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, etc. En la figura (3.4) se muestra el perfil deformado de la viga AB cuando las liberaciones se introducen sucesivamente en cada nodo, asumiendo que éstos se mantienen mediante puntales en su posición desviada de la original.

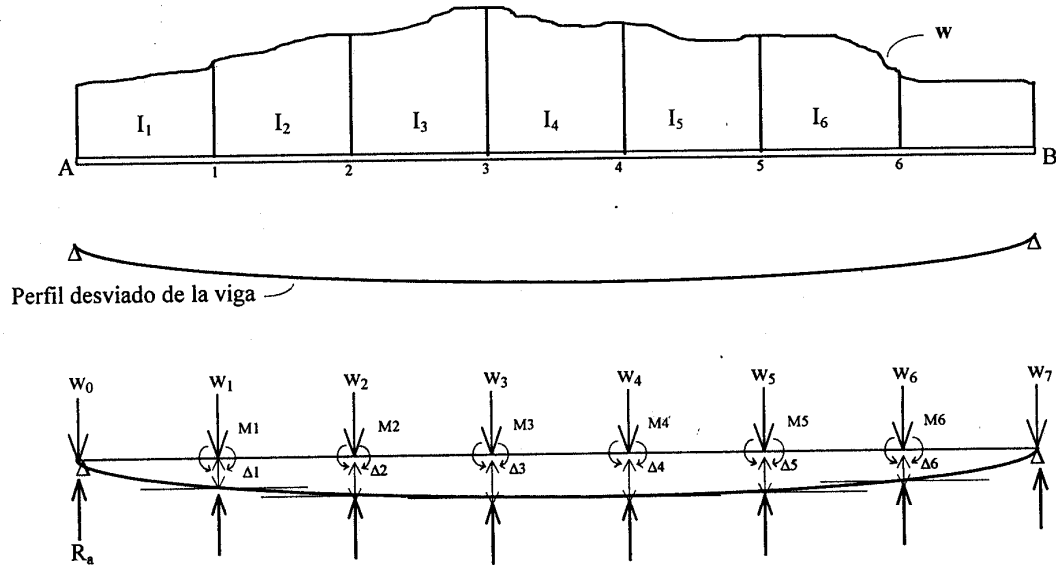
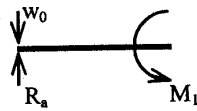


Figura (3.4)

Los momentos M_1, M_2, M_3 , etc. se aplican con el fin de eliminar los cambios angulares mostrados en el diagrama. Utilizando la misma notación anterior se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

Diagrama de cuerpo libre del nodo 0

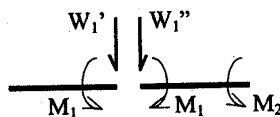


$$\sum \curvearrowright R_a a - W_0 a - M_1 = 0$$

$$\text{E.O: } \frac{M_1}{a} = R_a - W_0$$

$$\text{E.O: } M_1 = a(R_a - W_0)$$

Diagrama de cuerpo libre que involucra al nodo 1



Equilibrio en el lado izquierdo de 1

$$W_1' a - M_1 = 0$$

$$W_1' = \frac{M_1}{a}$$

En el lado derecho

$$-W_1'' a + M_1 - M_2 = 0$$

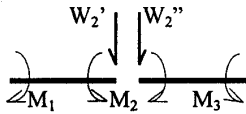
$$W_1'' = \frac{M_1 - M_2}{a}$$

$$\text{Como } W_1 = W_1' + W_1'' \Rightarrow$$

$$W_1 = \frac{M_1}{a} + \frac{M_1 - M_2}{a}$$

$$W_1 a = M_1 + M_1 - M_2$$

$$\text{E.1: } 2M_1 - M_2 = W_1 a$$



Equilibrio por el lado izquierdo

$$W_2' a + M_1 - M_2 = 0$$

$$W_2' = \frac{M_2 - M_1}{a}$$

Por el lado derecho

$$-W_2'' a + M_2 - M_3 = 0$$

$$W_2'' = \frac{M_2 - M_3}{a}$$

$$\text{si } W_2 = W_2' + W_2'' \Rightarrow$$

$$\text{E.2: } \frac{M_2 - M_1}{a} + \frac{M_2 - M_3}{a} = W_2$$

$$\text{E.2: } -M_1 + 2M_2 - M_3 = W_2 a$$

Así pues para el nodo 3

$$\text{E.3: } -M_2 + 2M_3 - M_4 = W_3 a$$

Multiplicando todo por $\frac{6EI_1}{a} = P$

Como $\frac{I_1}{I_2} = K_2 \Rightarrow$

Multiplicando todo por $\frac{6EI_1}{a} = P$

$$\mathbf{A.2: K_2 M_1 + 2M_2(K_2 + K_3) + K_3 M_3 + \frac{P}{a}(\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3) = 0}$$

$$\mathbf{A.3:} \quad K_3 M_2 + 2M_3(K_3 + K_4) + K_4 M_4 + \frac{P}{a}(\Delta_2 - 2\Delta_3 + \Delta_4) = 0$$

ECUACIÓN	1		2		3		4		$\overline{W}$
	M	P/a Δ	M	P/a Δ	M	P/a Δ	M	P/a Δ	
E.0	1								$a(R_s - W_0)$
A.1	$2(1+K_2)$	-2	K_2	1					0
E.1	2		-1						$W_1 a$
A.2	K_2	1	$2(K_2+K_3)$	-2	K_3	1			0
E.2	-1		2		-1				$W_2 a$
A.3			K_3	1	$2(K_2+K_4)$	-2	K_4	1	0
E.3			-1		2		-1		$W_3 a$
A.4	se repiten los términos encerrados de manera sistemática.								
E.4									
etc.									

Pueden escribirse ecuaciones similares para el resto de los nodos. En la tabla (3.3) se muestran estas ecuaciones en forma tabular. Esta tabla con algunas variaciones constituye el fundamento central del análisis de estructuras continuas, tales como cimentación sobre suelo elástico, muros de retención de tierras, tabla-estacado, pilotes sometidos a carga lateral, losas de cimentación, etc.

3.4 ARMADURAS

Para el análisis de estructuras trianguladas o armaduras se hace uso de las ecuaciones para desplazamiento lineal dadas en el capítulo 1. Las fuerzas en los miembros pueden obtenerse para estructuras determinadas a partir sólo de las ecuaciones de equilibrio. Los desplazamientos de las uniones pueden averiguarse con la ayuda de la ecuación 1.5, una vez que sean conocidas las fuerzas y propiedades de los miembros.

La solución de estructuras indeterminadas requerirá el uso de las ecuaciones de equilibrio y de las de desplazamiento lineal y angular. El diagrama de deformación alcanza una importancia significativa en el análisis de estructuras indeterminadas y marcos rígidos, debido a su utilidad en la identificación de las discontinuidades que surgen durante la liberación y en la elección del signo apropiado.

3.5 MARCOS RÍGIDOS

Los marcos rígidos de cualquier tamaño o forma práctica cargados también simétricamente, pueden resolverse de manera directa usando el programa MATIN. Cuando los momentos debido a la oscilación tienen que considerarse en adición a los ocasionados por las cargas aplicadas, estos 'momentos secundarios' también deben ser calculados. Para lograr esto se determinan los momentos ocasionados por una oscilación unitaria y se multiplican por los factores obtenidos al considerar los cortantes no balanceados en las cargas de las columnas. Un programa de computadora puede ejecutar estas operaciones. Debido a que los momentos oscilatorios relativos sólo se requieren en las etapas iniciales del análisis, los términos del vector de oscilación se expresan simplemente como las inversas de las alturas de las columnas (véase el capítulo 1). El diagrama de deformaciones proporciona la clave para la determinación de los desplazamientos relativos y su signo.

Los marcos con varios entrepisos sometidos a oscilaciones también pueden resolverse utilizando factores de corrección de la oscilación para cada entrepiso, tomados por separado.

El programa de computadora usa la subrutina fundamental tantas veces como entrepisos tenga el marco con el fin de obtener los momentos unitarios, suma los resultados en secuencia y utiliza de nuevo la subrutina para determinar los factores, imprimiendo finalmente la suma algebraica de los valores factorizados como momentos definitivos. Los marcos con varias crujías se analizan de manera similar, introduciendo las ecuaciones de equilibrio apropiadas para las condiciones imperantes en las caras de las columnas, utilizando de nuevo el programa de cómputo para obtener los resultados.

3.6 EMPARRILLADOS Y ENTRAMADOS DE VIGAS

La intersección de vigas en los entramados y los emparrillados cargados en ángulos rectos a sus planos, pueden analizarse de manera muy similar a lo descrito en la sección previa. Un programa para emparrillados deberá considerar solamente cargas aplicadas en los nodos, pero el programa que analice entramados de vigas tendrá que incluir criterios para evaluar la flexión de los miembros, ya que en estos casos las cargas se pueden aplicar lejos de los puntos nodales. Cuando además se tengan que tomar en cuenta los efectos torsionales se introducirán factores adicionales dentro de la matriz de coeficientes.